Vježbe 9

1. (a) Kreirati ternarni Hamming-ov kod (4,2), ako je generatorski polinom x^2+2x+2 (napisati odgovarajuću kontrolnu matricu).
   (b) Kodirati poruku $2x+1$ kreiranim Hamming-ovim kodom.
   (c) Generisana je greška težine 1 na poziciji 1. Provjeriti rad kreiranog Hamming-ovog koda u ovom slučaju.
   (d) Generisana je greška težine 2 na poziciji 1. Provjeriti rad kreiranog Hamming-ovog koda u ovom slučaju.
   (e) Kreirati generatorsku matricu ovoga koda.

Rješenje:

(a) Označimo sa α korjene posmatranog generatorskog polinoma. Dalje možemo pisati:

$\alpha^2+2\alpha+2=0$, odnosno

$\alpha^2=-2\alpha-2=\alpha+1$ (oduzimanje sa 2 nam se svodi na sabiranje sa 1!)

$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$

Zapišimo dobijene rezultate u vektorskom obliku:

$$\alpha^0=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad \alpha^1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad \alpha^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad \alpha^3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Kontrolna matrica H je tada:

$$H=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(b) Kodiranu poruku, po definiciji, dobijamo množenjem informacionih simbola i generatorskog polinoma:

$$c(x)=i(x)g(x)=(2x+1)(x^2+2x+2)=2x^3+4x^2+4x+x^2+2x+2=$$
$$=2x^3+5x^2+6x+2=2x^3+2x^2+2$$

Dakle, dobijena kodirana riječ je [2 2 0 2].

(c) Generišimo grešku težine 1 na poziciji 1. U tom slučaju je primljena poruka: [2 2 1 2]. Dekodiranje obavljamo dijeljenjem polinoma dobijene poruke i generatorskog polinoma:

$$(2x^3+2x^2+x+2):(x^2+2x+2)=2x+1$$
$$\underline{2x^3+x^2+x}$$
$$x^2+2$$
$$\underline{x^2+2x+2}$$
$$-2x\Rightarrow x$$

Ostatak odgovara koloni $[1\ 0]^T$, pa odavde nedvosmisleno zaključujemo da je greška težine 1 detektovana na poziciji α^1, odnosno da je ispravna poruka [2 2 0 2].

(d) Generišimo grešku težine 2 na poziciji 1. U tom slučaju je primljena poruka: [2 2 2 2]. Dekodiranje obavljamo dijeljenjem polinoma dobijene poruke i generatorskog polinoma:

$$(2x^3+2x^2+2x+2):(x^2+2x+2)=2x+1$$

$$\underline{2x^3+x^2+x}$$

$$x^2+x+2$$

$$\underline{x^2+2x+2}$$

$$\text{-}x \Rightarrow 2x$$

Ostatak odgovara umnošku prve kolone kontrolne matrice (koja odgovara poziciji α^1), odnosno $2\times[1\ \ 0]^T=[2\ \ 0]^T$. Odavde nedvosmisleno zaključujemo da je greška težine 2 detektovana na poziciji α^1, odnosno da je ispravna poruka [2 2 0 2].

(e) Pođimo od definicija generatorkse i kontrolne matrice nebinarnih kodova:

$$\mathbf{G}=[\mathbf{I}_k \mid \mathbf{R}] \qquad \mathbf{H}=[\mathbf{P}^T \mid \mathbf{I}]$$

Prisjetimo se da $\mathbf{GH^T}=0$ mora biti zadovoljeno. Stoga je:

$$\mathbf{GH}^T=\mathbf{P}+\mathbf{R}=\mathbf{0}$$

U dijelu pod (a) smo odredili da je kontrolna matrica za ovaj kod:

$$H=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

što dalje znači da je:

$$P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

U skladu sa napisanim jednačinama, veoma je jednostavno odrediti R:

$$P+R=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

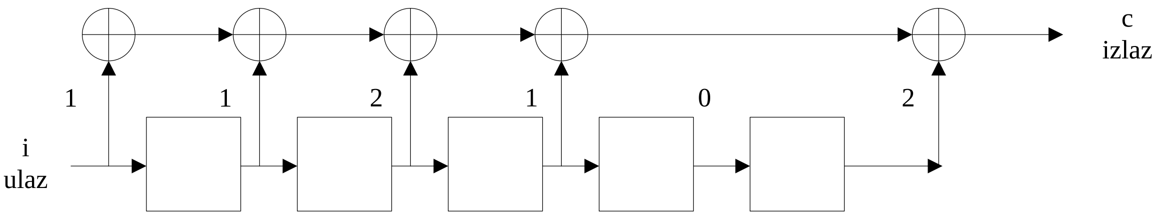
Stoga je generatorska matrica:

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

2. (a) Kreirati hardversku strukturu koja kodira ternarni Golay-ev kod (11,6).
(b) Dokazati da je ovaj kod cikličan.
(c) Prikazati primjer kodiranja i dekodiranja ovim kodom (uradite sami!).

Rješenje:

(a) Posmatrajmo generatorski polinom: $f(x)=x^5+x^4+2x^3+x^2+2$. Hardver koji realizuje kodiranje ovog koda je:



(b) Kod je cikličan ako je polinom x^n-1 (u našem slučaju x^{11}-1= x^{11}+2) djeljiv sa generatorskim polinomom:

$(x^{11}+2) : (x^5+x^4+2x^3+x^2+2) = x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+1$
$x^{11}+x^{10}+2x^9+x^8+2x^6$

$2x^{10}+x^9+2x^8+x^6+2$
$2x^{10}+2x^9+x^8+2x^7+x^5$

$2x^9+x^8+x^7+x^6+2x^5+2$
$2x^9+2x^8+x^7+2x^6+x^4$

$2x^8+2x^6+2x^5+2x^4+2$
$2x^8+2x^7+x^6+2x^5+x^3$

$x^7+x^6+2x^4+2x^3+2$
$x^7+x^6+2x^5+x^4+2x^2$

$x^5+x^4+2x^3+x^2+2$

Pošto smo dobili djeljivost bez ostatka možemo zaključiti da je u pitanju ciklični kod.